15　まとめの問題（整数）

110

(1)

$$
\begin{aligned}
a^2+b^2&=\left(n^2-m^2\right)^2+(2mn)^2\\
&=n^4-2n^2m^2+m^4+4n^2m^2\\
&=n^4+2n^2m^2+m^4\\
&=\left(n^2+m^2\right)^2\\
&=c^2
\end{aligned}
$$

(2)

(1)より，三角形はcを斜辺とする直角三角形だから，$S=\dfrac{1}{2}ab$

これと$ab=\left(n^2-m^2\right)\cdot 2mn=2mn(n-m)(n+m)$より，$S=mn(n-m)(n+m)$　・・・①

一方，内接円の半径rから，$S=\dfrac{1}{2}r(a+b+c)$

これと$a+b+c=n^2-m^2+2mn+n^2+m^2=2n(n+m)$より，$S=r\,n(n+m)$・・・②

①，②より，$r\,n(n+m)=mn(n-m)(n+m)$　$\therefore r=m(n-m)$

(3)

(2)より，$r=m(n-m)$　・・・③

これと，rが素数であることと，$m>0$，$n-m>0$より，

$\begin{cases}m=1\\ n-m=r\end{cases}$ または $\begin{cases}m=r\\ n-m=1\end{cases}$　すなわち　$(m,\ n)=(1,\ r+1)$　または$(m,\ n)=(r,\ r+1)$

それぞれを②に代入することにより，

$(m,\ n)=(1,\ r+1)$のとき　$S=r(r+1)(r+2)$

$(m,\ n)=(r,\ r+1)$のとき　$S=r(r+1)(2r+1)$

(4)

$S=r(r+1)(r+2)$のとき

Sは連続する3つの整数の積だから，6で割り切れる。

$S=r(r+1)(2r+1)$のとき

$$
\begin{aligned}
r(r+1)(2r+1)&=r(r+1)\{(r-1)+(r+2)\}\\
&=(r-1)r(r+1)+r(r+1)(r+2)
\end{aligned}
$$

より，

Sは連続する3つの整数の積の和だから，6で割り切れる。

111

(1)

$$\begin{aligned}(ax+by)^2+(ay-bx)^2&=\left(a^2x^2+2abxy+b^2y^2\right)+\left(a^2y^2-2abxy+b^2x^2\right)\\&=a^2x^2+b^2y^2+a^2y^2+b^2x^2\\&=a^2\left(x^2+y^2\right)+b^2\left(x^2+y^2\right)\\&=\left(a^2+b^2\right)\left(x^2+y^2\right)\end{aligned}$$

(2)

a，b，x，y を整数とすると，$\alpha=a^2+b^2$，$\beta=x^2+y^2$ と表せる。

これと(1)より，$\alpha\beta=\left(a^2+b^2\right)\left(x^2+y^2\right)=(ax+by)^2+(ay-bx)^2$

$ax+by$，$ay-bx$ は整数だから，$(ax+by)^2+(ay-bx)^2$ は 2 つの平方数の和である。

よって，$\alpha\beta$ は A の要素である。

(3)

$25=0^2+5^2$ より，25 は A の要素である。$50=5^2+5^2$ より，50 は A の要素である。

$1250=25\cdot 50$ および(2)より，1250 は A の要素である。

112

(1)

2 進法の 4 桁回分は $1001_{(2)}$，$1111_{(2)}$ であり，それぞれを 10 進法で表すと，

$1001_{(2)}$ ：$1\cdot 2^3+0\cdot 2^2+0\cdot 2^1+1\cdot 2^0=9$，$1111_{(2)}$ ：$1\cdot 2^3+1\cdot 2^2+1\cdot 2^1+1\cdot 2^0=15$

よって，9，15

(2)

3 進法の 4 桁回文は $1001_{(3)}$，$1111_{(3)}$，$1221_{(3)}$，$2002_{(3)}$，$2112_{(3)}$，$2222_{(3)}$

それぞれを 10 進法で表すと，

$1001_{(3)}$ ：$1\cdot 3^3+0\cdot 3^2+0\cdot 3^1+1\cdot 3^0=28$，$1111_{(3)}$ ：$1\cdot 3^3+1\cdot 3^2+1\cdot 3^1+1\cdot 3^0=40$

$1221_{(3)}$ ：$1\cdot 3^3+2\cdot 3^2+2\cdot 3^1+1\cdot 3^0=52$，$2002_{(3)}$ ：$2\cdot 3^3+0\cdot 3^2+0\cdot 3^1+2\cdot 3^0=56$

$2112_{(3)}$ ：$2\cdot 3^3+1\cdot 3^2+1\cdot 3^1+2\cdot 3^0=68$，$2222_{(3)}$ ：$2\cdot 3^3+2\cdot 3^2+2\cdot 3^1+2\cdot 3^0=80$

よって，28，40，52，56，68，80

(3)

9 進法の 4 桁回文は $abba_{(9)}$

ただし，a がとれる値の数は，$a=1,\ 2, 3,\ \cdots 8$ の 8 個

b がとれる値の数は，$b=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 8$ より，の 9 個

よって，4 桁回分の個数は $8\times 9=72$ 個

(4)

4 進法の 4 桁回文は $abba_{(4)}$ （$a=1,\ 2,\ 3$， $b=0,\ 1,\ 2,\ 3$）と表せる。

これを 10 進法で表すと， $a\cdot 4^3+b\cdot 4^2+b\cdot 4^1+a\cdot 4^0=65a+20b=5(13a+4b)$

これと， $a=1$， $b=0$ のとき $13a+4b=13$， $a=b=1$ のとき $13a+4b=17$ より，

$13a+4b$ には互いに素な整数が含まれることから，

4 進法の 4 桁回文すべての最大公約数は 5 である。

(5)

n 進法の 4 桁回文は $abba_{(n)}$ （$a=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n$， $b=0,\ 1,\ 2,\cdots,\ n$）と表せる。

これを 10 進法で表すと，

$$\begin{aligned}a\cdot n^3+b\cdot n^2+b\cdot n^1+a\cdot n^0&=\left(n^3+1\right)a+\left(n^2+n\right)b\\&=a(n+1)\left(n^2-n+1\right)+bn(n+1)\\&=(n+1)\left\{a\left(n^2-n+1\right)+bn\right\}\end{aligned}$$

よって， n 進法の 4 桁回文はすべて $n+1$ で割り切れる。

113

(1)

$(x,\ y,\ z)=(a,\ a+1,\ b)$ が①の解 $\Rightarrow$ $(s,\ t,\ u)=\left(a^*,\ a^*+1,\ b^*\right)$ は②の解

$(x,\ y,\ z)=(a,\ a+1,\ b)$ が①の解であることから， $a^2+(a+1)^2=b^2$

すなわち $2a^2+2a+1=b^2$　・・・③

$(s,\ t,\ u)=\left(a^*,\ a^*+1,\ b^*\right)$ とすると，

$$\begin{aligned}s^2+t^2-\left(u^2+1\right)&=\left(a^*\right)^2+\left(a^*+1\right)^2-\left\{\left(b^*\right)^2+1\right\}\\&=2\left(a^*\right)^2+2a^*-\left(b^*\right)^2\\&=2(a+b)^2+2(a+b)-(2a+b+1)^2\\&=b^2-\left(2a^2+2a+1\right)\end{aligned}$$

よって，③より， $s^2+t^2-\left(u^2+1\right)=0$　すなわち $s^2+t^2=u^2+1$

ゆえに， $(x,\ y,\ z)=(a,\ a+1,\ b)$ が①の解 $\Rightarrow$ $(s,\ t,\ u)=\left(a^*,\ a^*+1,\ b^*\right)$ は②の解

$(s,\ t,\ u)=(a,\ a+1,\ b)$ が②の解 $\Rightarrow(x,\ y,\ z)=\left(a^*,\ a^*+1,\ b^*\right)$ は②の解

$(s,\ t,\ u)=(a,\ a+1,\ b)$ が②の解であることから， $a^2+(a+1)^2=b^2+1$

すなわち $2a^2+2a=b^2$　・・・④

$(x,\ y,\ z)=\left(a^*,\ a^*+1,\ b^*\right)$ とすると，

$$\begin{aligned}x^2+y^2-z^2&=\left(a^*\right)^2+\left(a^*+1\right)^2-\left(b^*\right)^2\\&=2(a+b)^2+2(a+b)+1-(2a+b+1)^2\\&=b^2-\left(2a^2+2a\right)\end{aligned}$$

よって，④より， $x^2+y^2-z^2=0$　すなわち $x^2+y^2=z^2$

ゆえに， $(s,\ t,\ u)=(a,\ a+1,\ b)$ が②の解 $\Rightarrow(x,\ y,\ z)=\left(a^*,\ a^*+1,\ b^*\right)$ は②の解

(2)

$(x,\ y,\ z)=(3,\ 4,\ 5)$は①を満たす自然数解の 1 つである。

これと(2)から，

$(3,\ 4,\ 5)$は①の解 $\Rightarrow$ $(3+5,\ 3+5+1,\ 2\cdot3+5+1)$すなわち$(8,\ 9,\ 12)$は②の解

$(8,\ 9,\ 12)$は②の解 $\Rightarrow$ $(8+12,\ 8+12+1,\ 2\cdot8+12+1)$すなわち$(20,\ 21,\ 29)$は①の解

$(20,\ 21,\ 29)$は①の解 $\Rightarrow$ $(20+29,\ 20+29+1,\ 2\cdot20+29+1)$すなわち$(49,\ 50,\ 70)$は②の解

$(49,\ 50,\ 70)$は②の解 $\Rightarrow$ $(49+70,\ 49+70+1,\ 2\cdot49+70+1)$すなわち$(119,\ 120,\ 169)$は①の解

$\vdots$

が成り立つ。

よって，①を満たす 3 組の自然数解をあげると，$(3,\ 4,\ 5)$，$(20,\ 21,\ 29)$，$(119,\ 120,\ 169)$

114

(1)

$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}<1$ より，$\dfrac{1}{a}<1$　すなわち $a>1$

これと，a が自然数であることから，$a\geq2$　・・・①

b は $b>a$ を満たす自然数であることと①より，$b\geq3$　・・・②

①，②より，$\dfrac{1}{a}\leq\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{b}\leq\dfrac{1}{3}$

よって，$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\leq\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}=\dfrac{5}{6}$ （等号成立は $a=2$，$b=3$ のとき）

(2)

$a=2$ のとき

$\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}<1$ より，$\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}<\dfrac{1}{2}$

$b>a$ より，$b\geq3$ だから，

$b=3$ とすると，

$\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{c}<\dfrac{1}{2}$ より，$\dfrac{1}{c}<\dfrac{1}{6}$ より，$c\geq7$

よって，$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{c}\leq\dfrac{5}{6}+\dfrac{1}{7}=\dfrac{41}{42}$ （等号成立は $c=7$ のとき）・・・③

$b\geq4$ とすると，

$\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\leq\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{c}<\dfrac{1}{2}$ より，$\dfrac{1}{c}<\dfrac{1}{4}$　$\therefore c\geq5$

よって，$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\leq\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}=\dfrac{19}{20}$ （等号成立は $a=2$，$b=4$，$c=5$ のとき）　・・・④

$a \geq 3$ のとき

$b \geq 4$ とすると,

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \leq \frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{c}<1$ より, $\frac{1}{c}<\frac{5}{12}$

これと, $a<b<c$ より, $c \geq 5$

よって, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \leq \frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{47}{60}$ (等号成立は $a=3$, $b=4$, $c=5$ のとき)　・・・⑤

③, ④, ⑤で, $\frac{41}{42}>\frac{19}{20}>\frac{47}{60}$

よって, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ は $a=2$, $b=3$, $c=7$ のとき最大値 $\frac{41}{42}$ をとる。

115

12 は 12, $2 \cdot 6$, $3 \cdot 4$, $2 \cdot 2 \cdot 3$ と表せる。したがって, p, q, r を N の異なる素因数とすると, 条件(A)を満たす N の素因数分解の型には,

$N=p^{11}$, $N=pq^5$, $N=p^2q^3$, $N=pqr^2$ の 4 つがある。

そこで, それぞれの型について, 条件(B)も満たすような N を求めることにする。

(i) $N=p^{11}$ 型

小さい方から 7 番目の数は p^6 だから, p^6　　一方, $12=2^2 \cdot 3$

よって, 条件(B)を満たさない。

(ii) $N=pq^5$ 型

$12=3 \cdot 2^2$ より, 12 が N の約数ならば $pq^2=12$　$\therefore p=3$, $q=2$

これより, $N=3 \cdot 2^5=96$

また, 96 の約数を値の小さい方から 12 まで並べると, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 となる。

よって, 12 は小さい方から 7 番目の約数となり, 条件(B)も満たす。

補足：96 の約数は 3 の約数 $\{1,\ 3\}$ と 2^5 の約数 $\{1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32\}$ の積で与えられることを利用して, 約数を小さい方から並べればよい

(iii) $N=p^2q^3$ 型

(ii)と同様に考えて, $p^2q=12$ または $pq^2=12$ より, $(p,\ q)=(2,\ 3)$ または $(p,\ q)=(3,\ 2)$

$(p,\ q)=(2,\ 3)$ のとき

$N=2^2 \cdot 3^3=108$

約数を値の小さい方から 12 まで並べると, 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12 となる。

よって, 12 は小さい方から 7 番目の約数となり, 条件(B)も満たす。

$(p,\ q)=(3,\ 2)$ のとき

$N=3^2 \cdot 2^3=72$

約数を値の小さい方から 12 まで並べると, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12 となる。

12 は小さい方から 8 番目の約数となり, 条件(B)を満たさない。

(iv) $N = pqr^2$ 型

p と q のどちらか一方が 3 で $r = 2$ であることが必要だから，

$p = 3$ とすると， $N = 2^2 \cdot 3 \cdot q$

まず， $2^2 \cdot 3$ の約数を小さい方から順に並べると，1，2，3，4，6，12 となる。

これに q の約数を掛け，小さい方から順に 12 まで並べる。

$q = 5$ のとき

1，2，3，4，5，6，10，12

12 は小さい方から 8 番目の約数となり，条件(B)を満たさない。

$q = 7$ のとき

1，2，3，4，6，7，12

よって，12 は小さい方から 7 番目の約数となり，条件(B)も満たす。

このとき $N = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 = 84$

$q = 11$ のとき

1，2，3，4，6，11，12

よって，12 は小さい方から 7 番目の約数となり，条件(B)も満たす。

このとき $N = 2^2 \cdot 3 \cdot 11 = 132$

q が 11 より大きい素数のとき

1，2，3，4，6，12

よって，12 は小さい方から 6 番目の約数となり，条件(B)を満たさない。

以上，(i)から(iv)より，条件(A)，(B)をともに満たす正の整数 N は 84，96，108，132

116

(1)

$28 = 2^2 \cdot 7$ より，28 の約数の総和は $(1 + 2 + 2^2)(1 + 7) = 56$

よって，28 の約数で，28 以外の約数の和は $56 - 28 = 28$

ゆえに，28 は完全数である。

(2)

$$\begin{aligned}(1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1})(1 + p) &= \frac{2^n - 1}{2 - 1} \times (1 + p) \\ &= (2^n - 1)(p + 1)\end{aligned}$$

(3)

$2^{n-1} p$ （ p は素数）のすべての正の約数の和は，(2)より， $(2^n - 1)(p + 1)$ で与えられる。

したがって，$2^n - 1$ が素数ならば $2^{n-1}(2^n - 1)$ のすべての正の約数の和は $(2^n - 1)\{(2^n - 1) + 1\}$

すなわち $(2^n - 1) \cdot 2^n$ となる。

よって， $2^{n-1}(2^n - 1)$ の約数で， $2^{n-1}(2^n - 1)$ 以外の約数の和は，

$(2^n - 1) \cdot 2^n - 2^{n-1}(2^n - 1) = 2^{n-1}(2^n - 1)$ より， $2^{n-1}(2^n - 1)$ と等しい。

ゆえに， $2^{n-1}(2^n - 1)$ は完全数である。

(4)

偶数であるaが2で$n-1$回（nは2以上の自然数）割り切れるとすると，

$a=2^{n-1}k$ （kは奇数） ・・・①

完全数であるaの正の約数の総和を$S(a)$とおくと，$a=S(a)-a$より，

$S(a)=2a$ ・・・②

よって，①，②より，$S(a)=2^n k$ ・・・③

一方，①より，

$$
\begin{aligned}
S(a)&=S\left(2^{n-1}k\right)\\
&=S\left(2^{n-1}\right)S(k)\\
&=\left(1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}\right)S(k)\\
&=\frac{2^n-1}{2-1}\cdot S(k)\\
&=\left(2^n-1\right)S(k) \quad \cdots ④
\end{aligned}
$$

③，④より，$2^n k=\left(2^n-1\right)S(k)$

よって，$S(k)=\dfrac{2^n k}{2^n-1}=k+\dfrac{k}{2^n-1}$ ・・・⑤

ここで，$\dfrac{k}{2^n-1}$について，

$S(k)$とkは整数だから，⑤より，$\dfrac{k}{2^n-1}$は整数　すなわち$\dfrac{k}{2^n-1}$はkの約数である。

また，$2^n-1\geq 3$より，$k>\dfrac{k}{2^n-1}>0$

よって，$\dfrac{k}{2^n-1}$はk以外のkの正の約数である。

したがって，⑤より，kの正の約数は2つだけである。すなわちkは素数である。

よって，$\dfrac{k}{2^n-1}=1$すなわち$k=2^n-1$ ・・・⑥

ゆえに，①と⑥より，$a=2^{n-1}\left(2^n-1\right)$（ただし，$n$は2以上の自然数）